مقايسس التشتت والاختلاف

4.5 الانحراف المعياري

❖ الانحراف المعياري (S.D):-

الانحراف المعياري اهم مقاييس التشتت واكثرها استخداماً، ويرمز له (S): وهو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين (S^2)، وصياغته:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}} \quad ....(1)$$

حيث:

$\sum$ = مجموع S = الانحراف المعياري

x = قيمة الظاهرة S^2 = التباين

$\bar{x}$ = متوسط الظاهرة

n = عدد مفردات الظاهرة

وبالتالي فان الانحراف المعياري يقيس التشتت بنفس وحدات القيم الاصلية ، وعليه فهو يقيس متوسط انحرافات القيم عن الوسط الحسابي – او متوسط التشتت حول الوسط الحسابي

❖ التباين :-

صيغة اخرى للتباين بعد فك قوس مربع الانحرافات $(x-\bar{x})^2$ يصبح كالتالي:-

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)} \quad ....(2)$$

حيث:

$\sum x^2$ = مجموع مربع (x)

$(\sum x)^2$ = مربع مجموع (x)

مثال: اوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية: (40 , 44 , 28 , 36 , 32)

الحل:

- اولا نحصل على الوسط الحسابي = $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{40+44+28+36+32}{5} = 36$

- ثم نحصل على التباين ومنه على الانحراف المعياري كالتالي:-

X	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
40	4	16
44	8	64
28	- 8	64
36	0	0
32	- 4	16
		160

$$S^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{160}{4} = 40$$

∴ الانحراف المعياري $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{40} = 6.32$

ahmed.hmood@sci.utq.edu.iq Geology dept. / Science college/ University of thi-Qar

مثال: اوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية: (32 , 36 , 28 , 44 , 40)

الحل: باستخدام الصيغة (2)

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{n}\right)}.......(2)$$

- نحصل على مجموع (x)
- ونحصل على مربع (x) كالتالي:-

X	x^2
40	1600
44	1936
28	784
36	1296
32	1024
$\sum x$= 180	$\sum x^2$ = 6640

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(6640-\frac{(180)^2}{5}\right)}$$

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(6640-\frac{32400}{5}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}(6640-6480)}$$

∴ الانحراف المعياري $S==\sqrt{\frac{160}{4}}=\sqrt{40}=6.32$

وتفسير ناتج الانحراف المعياري (٦،٣٢) هو ان البيانات تتشتت عن الوسط الحسابي بمعدل ٦،٣٢ وحدات

- وكلما كان الانحراف المعياري صغيرا كلما كان تشتت البيانات صغيرا أي ان القيم متقاربة من الوسط الحسابي

- وكلما كان الانحراف المعياري كبيرا كلما كان التشتت كبيرا ودل ذلك على ان القيم متباعدة عن الوسط الحسابي

- من استخدامات الانحراف المعياري انه يعتبر المؤشر الشائع لقياس خطورة الاستثمار في الاصول او الاسهم

مثال: اذا كان احد الافراد لديه راس مال ويرغب استثماره في اسهم احدى شركتين (أ) و (ب) وكان معدل عوائد اسهم الشركتين كالتالي:-

السنوات	معدل عائد شركة (أ)	معدل عائد شركة (ب)
١	٩،٤	١١،٣
٢	١٧،١	١٢،٥
٣	١٣،٣	١٣
٤	١٠	١٢
٥	١١،٢	١٢
المجموع	٦٠	٦٠
متوسط العائد	١٢،٢	١٢،٢
الانحراف المعياري	٣،١٢	٠،٦٣

نلاحظ ان متوسط العائد لكل سهم = ١٢،٢%
- والمستثمر دائما يبحث عن استثمار تكون فيه المخاطرة منخفضة، ومؤشر المخاطرة هنا هو الانحراف المعياري
- فكلما كان الانحراف المعياري كبيرا كلما كانت المخاطرة اكبر والعكس صحيح
- وهنا الانحراف المعياري لمعدل عائد سهم شركة (أ) = ٣،١٢ وهو اكبر من الانحراف المعياري لمعدل عائد سهم شركة (ب) = ٠،٦٣ – مما يعني ان معدلات عوائد سهم شركة (أ) تتقلب في نطاق كبير خلال السنوات الخمس الماضية، ولذلك فان سهم شركة (أ) يتضمن مخاطرة اكبر من سهم شركة (ب) لان احرافه المعياري منخفض ٠،٦٣ مما يدل على استقراره وبالتالي معدل مخاطرة الاستثمار في سهم شركة (ب) منخفضة وهو الافضل للاستثمار

سؤال: بماذا يمتاز الانحراف المعياري (S) عن التباين (S^2)؟
الاجابة: يمتاز الانحراف المعياري عن التباين بانه يعبر عن التشتت باستخدام نفس وحدات القياس للبيانات بينما يعبر التباين عن التشتت باستخدام مربع وحدات القياس

ahmed.hmood@sci.utq.edu.iq Geology dept. / Science college/ University of thi-Qar

❖الانحراف المعياري (S.D):- للبيانات المبوبة

الانحراف المعياري للبيانات المبوبة ياخذ الصيغة التالية:-

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 \times f}{n-1}}$$

حيث:

x = مركز الفئة

$\bar{x}$ = الوسط الحسابي

f = التكرار

- أي انه الجذر التربيعي لمجموع حاصل ضرب مربعات انحرافات مراكز الفئات عن وسطها الحسابي مقسوما على حجم العينة ناقص واحد (درجات الحرية)

❖الانحراف المعياري (S.D):- للبيانات المبوبة

مثال: الجدول التالي يوضح توزيع اجور العمال في الساعة الواحدة في احدى المصانع

عدد العمال (f)	فئات الاجور
1	3.50 – 3.59
2	3.60 -3.69
2	3.70 – 3.79
4	3.80 – 3.89
5	3.90 – 3.99
6	4.00 – 4.09
3	4.10 – 4.19
2	4.20 – 4.29
f= n = 25	

المطلوب: احسب الانحراف المعياري (S) لاجور هؤلاء العمال؟

❖الانحراف المعياري (S.D):- للبيانات المبوبة

الحل: علينا ان نوجد الاتي:

- مركز الفئة: (x)
- الوسط الحسابي: $(\bar{x})$
- الانحرافات عن الوسط الحسابي: $(x-\bar{x})$
- مربع الانحرافات: $(x-\bar{x})^2$
- ضرب مربعات الانحرافات في التكرارات : $(x-\bar{x})^2 \times f$

كما في الجدول التالي:-

ahmed.hmood@sci.utq.edu.iq Geology dept. / Science college/ University of thi-Qar

فئات الاجور	عدد العمال (f)	(x)	$(x.f)$	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 \times f$
3.50 – 3.59	1	3.55	3.55	- 0.39	0.15	0.15
3.60 -3.69	2	3.65	7.30	- 0.29	0.08	0.17
3.70 – 3.79	2	3.75	7.50	- 0.19	0.04	0.07
3.80 – 3.89	4	3.85	15.40	- 0.09	0.1	0.03
3.90 – 3.99	5	3.95	19.75	- 0.01	0.00	0.00
4.00 – 4.09	6	4.05	24.30	0.11	0.01	0.06
4.10 – 4.19	3	4.15	12.45	0.21	0.04	0.13
4.20 – 4.29	2	4.25	8.50	0.31	0.09	0.19
	f= n = 25		98.45			0.8

الوسط الحسابي: $$\bar{x} = \frac{\sum x.f}{\sum f} = \frac{98.45}{25} = 3.95$$

❖الانحراف المعياري (S.D):- للبيانات المبوبة

فئات الاجور	عدد العمال (f)	(x)	$(x.f)$	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 \times f$
3.50 – 3.59	1	3.55	3.55	- 0.39	0.15	0.15
3.60 -3.69	2	3.65	7.30	- 0.29	0.08	0.17
3.70 – 3.79	2	3.75	7.50	- 0.19	0.04	0.07
3.80 – 3.89	4	3.85	15.40	- 0.09	0.1	0.03
3.90 – 3.99	5	3.95	19.75	- 0.01	0.00	0.00
4.00 – 4.09	6	4.05	24.30	0.11	0.01	0.06
4.10 – 4.19	3	4.15	12.45	0.21	0.04	0.13
4.20 – 4.29	2	4.25	8.50	0.31	0.09	0.19
	f= n = 25		98.45			0.8

∴ الانحراف المعياري: $$s = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 \times f}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.8}{24}} = \sqrt{0.033} = 0.0011$$

4.6 معاملات الاختلاف

❖معامل الاختلاف (C.V):-

هو مقياس يقيس درجة التشتت النسبي، ويتم حسابه من خلال نسبة تشتت القيم الى متوسطها

ونحصل عليه من خلال قسمة الانحراف المعياري على الوسط الحسابي كالتالي:-

معامل الاختلاف = $$\boxed{C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100}$$

حيث:

الانحراف المعياري: S

الوسط الحسابي: $\bar{x}$

ahmed.hmood@sci.utq.edu.iq Geology dept. / Science college/ University of thi-Qar

❖معامل الاختلاف (C.V):-

مثال (١):

اذا كان هناك مجموعتان من البيانات كالاتي:-

المجموعة	الوسط الحسابي $(\bar{x})$	الانحراف المعياري (S)
1	160	22.4
2	150	20

المطلوب: وضح مدى تجانس مفردات المجموعة الاولى مقارنة بتجانس مفردات المجموعة الثانية؟

الحـل:

بما ان الوسط الحسابي للمجموعة الاولى ≠ الوسط للمجموعة الثانية

الانحراف المعياري للمجموعة الاولى ≠ الانحراف المعياري للمجموعة الثانية

لابد من ..... حساب معامل الاختلاف لكل منهما ثم نقارن بينهما:-

معامل الاختلاف (1) = $\frac{22.4}{160}\times 100 = 14\%$ معامل الاختلاف (م٢) = $\frac{20}{150}\times 100 = 13.3\%$

والنتيجة ان المجموعة الثانية اكثر تجانسا واقل تشتتا لان معامل الاختلاف اقل (١٣،٣%)

❖معامل الاختلاف (C.V):-

مثال (٢):

مجموعتان من الموظفين يحصلون على اجورهم/ساعة بعملات مختلفة كالاتي

(م١) بالدولار	4	7	3	8	10
(م٢) بالريال	18	16	15	17	15

المطلوب: وضح مدى تجانس اجور العاملين في المجموعة الاولى مع الثانية؟

الحـل:

- بما ان وحدات القياس للظاهرتين مختلفة (دولار وريالات) فعلينا ان نستخدم معامل الاختلاف لمعرفة مدى تجانس المجموعتين
- وعلينا ان نحصل اولا على الاوساط الحسابية والانحرافات المعيارية للمجموعتين

مجموعتان من الموظفين يحصلون على اجورهم/ساعة بعملات مختلفة كالاتي

(م١) بالدولار	4	7	3	8	10
(م٢) بالريال	18	16	15	17	15

اولا: المجموعة (م١)

الوسط الحسابي (س) (م١): $$\bar{x} = \frac{4+7+3+8+10}{5} = 6.4$$

الانحراف المعياري (ع) (م١)= $$S = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

مثال (٢):

$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})$	X
5.76	- 2.4	4
0.36	0.6	7
11.56	- 3.4	3
2.56	1.6	8
12.96	3.6	10
33.2		المجموع

الانحراف المعياري (S) $S=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{33.2}{4}}=2.8$ دولار

∴ معامل الاختلاف $C.V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{2.8}{6.4}=43.7\%$

مثال (٢):
مجموعتان من الموظفين يحصلون على اجورهم/ساعة بعملات مختلفة كالاتي

10	8	3	7	4	(م١) بالدولار
15	17	15	16	18	(م٢) بالريال

ثانيا: المجموعة (م٢)

الوسط الحسابي (م٢) $\bar{x}=\frac{18+16+15+17+15}{5}=16.2$

الانحراف المعياري (ع) (م١)= $S=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$

مثال (٢):

$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})$	X
3.24	1.8	18
0.04	- 0.2	16
1.44	- 1.2	15
0.64	0.8	17
1.44	- 1.2	15
6.8		المجموع

الانحراف المعياري (S) $S=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{6.8}{4}}=1.30$

∴ معامل الاختلاف $C.V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{1.30}{16.2}=8\%$

اذا: معامل الاختلاف (م١) = 43.7 %

معامل الاختلاف (م٢) = 8 %

بما ان معامل الاختلاف للمجموعة (٢) = (8 %) وهو اقل من معامل الاختلاف للمجموعة (١) = (43.7 %) فان:

المجموعة (٢) اقل تشتتا وهي اكثر تجانسا مقارنة بالمجموعة (١) التي بياناتها اكثر تشتتا واقل تجانسا

ahmed.hmood@sci.utq.edu.iq Geology dept. / Science college/ University of thi-Qar